# DS n°11 : Permutations, déterminants, intégration, dénombrement, probabilités – Corrigé

Noté sur 150 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est divisée par 5 pour faire une note sur 20.

## Exercice 1 : limites de suites

/7 **1)** Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^5}{k^3+n^3}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^5}{k^3+n^3} &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^5\frac{k^5}{n^5}}{n^3\left(\frac{k^3}{n^3}+1\right)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{k^5}{n^5}}{\frac{k^3}{n^3}+1}\end{aligned}$$

Comme $f : x \mapsto \frac{x^5}{x^3+1}$ est continue sur $[0,1]$, on a

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^5}{k^3+n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}dx$$

Or, après un calcul de partie entière, $\frac{X^5}{X^3+1} = X^2 + \frac{-X^2}{X^3+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}dx &= \int_0^1 x^2dx - \int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|\right]_0^1\\ &= \boxed{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln 2}\end{aligned}$$



**2)** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$$

/6,5 **a)** Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone et converge vers 0.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x}}dx$$

Or, pour tout $x\in[0,1]$, on a $x^{n+1}\le x^n$, donc $\frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x}}\le 0$. Ainsi, $u_{n+1}-u_n\le 0$. D'où $(u_n)$ est décroissante. De plus, comme $\frac{1}{\sqrt{1+x}}\le 1$,

$$\begin{aligned}|u_n| &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx\\ &\le \int_0^1 x^n dx\\ &= \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_n)$ converge vers 0.

**b)** Montrer qu'il existe une fonction $g : [0,1]\to\mathbb{R}$ que l'on précisera telle que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad (n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}g(x)dx$$

/3,5 ($g$ est continue mais il n'est pas nécessaire de le justifier)

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx\\ &= \left[\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x}^3}dx\\ &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 x^{n+1}g(x)dx\end{aligned}$$

avec $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}^3}$. On en déduit l'égalité voulue en multipliant par $n+1$.

/8 **c)** En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Comme la fonction $g$ est continue sur $[0,1]$, par le théorème des bornes atteintes, il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1] \qquad |g(x)| \leq M$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\left|\int_0^1 x^{n+1} g(x) dx\right| \leq M \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{M}{n+2}$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1} g(x) dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$(n+1)u_n \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi, $(n+1)u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ou encore

$$u_n \sim \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \sim \boxed{\frac{1}{n\sqrt{2}}}$$

**3)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$. Montrer que $f$ est la fonction nulle.

*Indication : on pourra considérer une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui tend vers une fonction bien choisie.*

/12

Puisque $f$ est continue, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(autrement dit on prend une suite $(g_n)$ qui "tend" vers $f$). Comme chaque fonction $g_n$ est en escalier, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)g_n(t)dt = 0$. Montrons que

$$\int_a^b f(t)g_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)^2 dt$$

En effet,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)g_n(t)dt - \int_a^b f(t)^2 dt\right| &= \left|\int_a^b f(t) \times (g_n(t) - f(t))dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(t)| \times |g_n(t) - f(t)|\, dt \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g_n(t)| \times \int_a^b f(t)dt\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de $n$, et le supremum ci-dessus tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\left|\int_a^b f(t)g_n(t)dt - \int_a^b f(t)^2 dt\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, on a donc

$$0 = \int_a^b f(t)g_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)^2 dt$$

Comme la limite de 0 est 0 (!), on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Ainsi, $t \mapsto f(t)^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle. On en déduit que cette fonction est nulle, et par suite $f$ aussi.

## Exercice 2 : dénombrement et permutations

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $S_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.

**1)** On pose $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{I}_n$) l'ensemble des permutations paires (respectivement impaires) de $S_n$. Enfin, on pose

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_n &\to \mathcal{I}_n \\ \sigma &\mapsto \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

/7 **a)** Montrer que $f$ est bien définie et est une bijection.

Montrons que $f$ est bien définie. Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$. Montrons que $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ est impaire :

$$\varepsilon\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \times (-1) = -1$$

Ainsi, $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{I}_n$ : $f$ est bien définie.

Montrons que $f$ est bijective. On pose

$$\begin{aligned} g : \mathcal{I}_n &\to \mathcal{P}_n \\ \sigma &\mapsto \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On montre comme pour $f$ que $g$ est bien définie. De plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{P}_n$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\sigma) &= g\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma \end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_n}$. On montre de même que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{I}_n}$. Finalement, $f$ et $g$ sont réciproques l'une de l'autre : on en déduit que $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

/4 **b)** En déduire les cardinaux de $\mathcal{P}_n$ et de $\mathcal{I}_n$.

Comme $f$ est bijective, on a $\mathrm{card}(\mathcal{P}_n) = \mathrm{card}(\mathcal{I}_n)$. Or, comme $S_n = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{I}_n$, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{card}(S_n) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_n) + \mathrm{card}(\mathcal{I}_n) - \mathrm{card}(\mathcal{P}_n \cap \mathcal{I}_n) \\ \Longrightarrow\ & n! = \mathrm{card}(\mathcal{P}_n) + \mathrm{card}(\mathcal{P}_n) - \mathrm{card}(\varnothing) \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{card}(\mathcal{P}_n) = \boxed{\frac{n!}{2}} = \mathrm{card}(\mathcal{I}_n) \end{aligned}$$

/5 **2) a)** Quel est le nombre total de transpositions dans $S_n$ ?



Toute transposition de $S_n$ s'écrit comme $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ avec $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts. Cependant, l'ordre ne compte pas : $\begin{pmatrix} j & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$. Il s'agit donc de compter le nombre de façons de prendre deux éléments de $[\![1, n]\!]$ sans tenir compte de l'ordre. Cela revient en réalité à trouver le nombre de sous-ensembles à deux éléments (distincts) de $[\![1, n]\!]$, ou encore à trouver le nombre de 2-combinaisons d'un ensemble à $n$ éléments. Le résultat recherché est donc

$$\binom{n}{2} = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

/12 **b)** Quel est le nombre total de 3 cycles dans $S_n$ (avec $n \geq 3$) ? Et de $p$-cycles (avec $n \geq p \geq 4$) ?

Tout 3-cycle de $S_n$ s'écrit comme $\begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}$ avec $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ distincts.

- En premier lieu, il faut choisir ces 3 entiers distincts, ce qui revient à se donner une 3-combinaison de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc $\binom{n}{3}$ choix possibles à ce stade.
- Une fois $i, j, k$ distincts et fixés, on peut former deux 3-cycles différents : $\begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i & k & j \end{pmatrix}$. En effet $i$ doit être envoyé ou sur $j$ ou sur $k$ et ce choix fixe le reste du cycle. Il faut donc multiplier $\binom{n}{3}$ par deux

Au final, le nombre de 3-cycles de $S_n$ est :

$$2\binom{n}{3} = \boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{3}}$$

Passons aux $p$-cycles avec $4 \leq p \leq n$. Un $p$-cycle s'écrit $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$

avec $a_1, \cdots, a_p \in [\![1, n]\!]$ distincts. Cette écriture n'est pas unique car $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & a_p & a_1 \end{pmatrix}$, etc. Quitte à réindexer, on peut supposer que $a_1$ est inférieur ou égal aux autres entiers $a_2, \cdots, a_p$ (si ce n'est pas le cas, on utilise la réécriture du $p$-cycle qui place le plus petit des entiers dans le support du cycle en première position). L'écriture devient alors unique.

- On choisit d'abord les entiers $a_1, \cdots, a_p$ qui forment le support du $p$-cycle $\sigma$ sans tenir compte de l'ordre. Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles.

- Ensuite, on remarque que le $p$-cycle $\sigma$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_1 & \sigma(a_1) & \sigma^2(a_1) & \cdots & \sigma^p(a_1) \end{pmatrix}$$

Le $p$-cycle est alors uniquement déterminé par la famille $(\sigma(a_1), \sigma^2(a_1), \cdots, \sigma^p(a_1))$, qui est une famille à $p-1$ éléments distincts de $\{a_2, \cdots, a_p\}$, donc une permutation de cet ensemble. Il y a donc $(p-1)!$ $p$-cycles ayant $(a_1, \cdots, a_p)$ comme support.

Note : on peut aussi faire des cases et dire qu'il y a $p-1$ choix possibles pour $\sigma(a_1)$, puis $p-2$ pour $\sigma^2(a_1)$, etc.

Finalement, le nombre de $p$-cycles de $S_n$ est :

$$\boxed{(p-1)! \times \binom{n}{p}} = \frac{n}{p \times (n-p)!} = \frac{A_n^p}{p}$$

On pouvait aussi retrouver cette valeur en dénombrant les $p$-uplets $(a_1, \cdots, a_p)$ où l'ordre compte (soit $A_n^p$ choix possibles) puis en divisant par $p$ en arguant le fait que si on impose que l'orbite du cycle soit $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_p$, alors on a compté $p$ fois chaque $p$-cycle :

$$(a_1, \cdots, a_p) \neq (a_2, a_p, \cdots, a_1) \neq \ldots \neq (a_p, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$$

mais

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & a_p & a_1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} a_p & a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

**3)** Quel est le nombre d'anagrammes de PERMUTATION avec les voyelles dans l'ordre alphabétique ?

/10

On présente deux méthodes.

**Méthode 1 : la condition sur l'ordre alphabétique vient à la fin.** Cherchons d'abord le nombre d'anagrammes possibles sans se préoccuper du placement des voyelles dans l'ordre alphabétique. Le mot PERMUTATION possède 11 lettres, ce qui donnerait 11! anagrammes possibles par permutations de lettres. Toutefois, à chaque anagramme, les deux T peuvent être échangés sans que cela ne change le mot obtenu. On en déduit qu'il y a un



total de $\frac{11!}{2}$ anagrammes du mot PERMUTATION.

Supposons qu'on ait fixé les positions de chaque consonne du mot : les 5 positions restantes sont donc utilisées par les voyelles. Il y a alors 5! façons de répartir ces voyelles dans ces 5 positions, mais une seule est correcte : celle où les voyelles apparaissent dans l'ordre AEIOU. Il faut donc diviser le nombre obtenu précédemment par 5!. On obtient donc

$$\boxed{\frac{11!}{2 \times 5!}}$$

**Méthode 2 : la condition sur l'ordre alphabétique vient au début.** PERMUTATION est un mot de 11 lettres. Il y a donc 11 positions / cases à remplir pour créer un anagrammes. On va d'abord choisir les cases qui contiendront les voyelles. Il faut donc choisir 5 cases parmi les 11, soit $\binom{11}{5}$ possibilités. Une fois qu'on a déterminé les cases qui contiennent des voyelles, il y a forcément A dans la première, E dans la seconde, etc. Les voyelles sont donc placées.

Passons aux consonnes. Il reste 6 consonnes à placer dans 6 cases. Il y a donc 6! possibilités, cependant, les positions des deux T sont interchangeables sans modifier l'anagramme, donc on doit diviser le résultat par 2. On obtient donc $\frac{6!}{2}$ possibilités pour le placement des consonnes. Ainsi, le nombre total d'anagrammes est :

$$\frac{6!}{2} \times \binom{11}{5} = \frac{6!}{2} \times \frac{11!}{5!6!} = \boxed{\frac{11!}{2 \times 5!}}$$

**4)** Combien de permutations de $S_n$ possèdent $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans leur décomposition en produits de cycles à supports disjoints ? Une justification précise est attendue.

/10

- Si $n = 2$, alors il n'y a qu'une seule permutation de $S_2$ qui convient : la transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- Supposons $n \geq 3$. On note $B$ l'ensemble des permutations de $S_n$ ayant $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans leur décomposition. Soit $\sigma \in B$. Comme l'orbite de 1 pour

$\sigma$ est de la forme $1 \to 2 \to 1$, on en déduit que $\sigma$ est de la forme

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

avec $\sigma(3), \cdots, \sigma(n) \in [\![3, n]\!]$ distincts. Chaque permutation $\sigma$ de $B$ est entièrement déterminée par la famille $(\sigma(3), \cdots, \sigma(n))$, qui est un $(n-2)$-arrangement de $[\![3, n]\!]$ (l'ordre compte, pas de répétition). Or, comme $[\![3, n]\!]$ possède $n-2$ éléments, il y a donc un total de

$$A_{n-2}^{n-2} = (n-2)!$$

telles familles, soit le même nombre de permutations ayant $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans leur décomposition.

Ainsi, dans tous les cas, il y a $\boxed{(n-2)!}$ permutations de $S_n$ ayant $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans leur décomposition.

# Exercice 3 : matrices et déterminants

/7

**1)** Résoudre l'équation d'inconnues $a, b, c \in \mathbb{R}$ : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} = 0$

On a

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & ca-ab & bc-ab \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\
=&\begin{vmatrix} c-b & c-a \\ a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix} \\
=&(c-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \\
=&(c-b)(c-a)(b-a)
\end{aligned}$$

Ainsi, $(a, b, c) \in \mathcal{S}$ si et seulement si $(c-b)(c-a)(b-a) = 0$, donc si et seulement si $c = b$ ou $c = a$ ou $b = a$.



**2)** Calculer le déterminant suivant de taille $n$ (avec $n \geq 1$) :

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & & & & \\ 2 & 5 & 2 & & 0 & \\ & 2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 2 & \\ & 0 & & 2 & 5 & 2 \\ & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n)}$$

/7

Soit un entier $n \geq 3$. On développe selon la première colonne. On a donc

$$D_n = 5D_{n-1} - 2 \begin{vmatrix} 2 & & & & 0 \\ 2 & 5 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 2 & 5 & 2 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

On développe le dernier déterminant selon la première ligne.

$$D_n = 5D_{n-1} - 4D_{n-2}$$

L'équation caractéristique est $r^2 = 5r - 4$, ou encore $r^2 - 5r + 4 = (r-1)(r-4) = 0$. Il y a donc deux racines réelles distinctes : 1 et 4. Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad D_n = A \times 1^n + B \times 4^n$$

Par ailleurs, on a $D_1 = \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} A + 4B = 5 \\ A + 16B = 21 \end{cases} \quad \begin{cases} 12B = 16 \\ A = 5 - 4B \end{cases} \quad \begin{cases} B = \dfrac{4}{3} \\ A = 5 - \dfrac{16}{3} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} D_n &= -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \times 4^n \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)} \end{aligned}$$

**3)** Soit $n \geq 2$ un entier pair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\mathrm{com}(X) = A$$

/14

On raisonne par analyse-synthèse.

**Analyse** : soit $X$ une solution. Alors

$$\begin{aligned} & \mathrm{com}(X) = A \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{com}(X)^\top = A^\top \\ \Longrightarrow\ & X\mathrm{com}(X)^\top = XA^\top \\ \Longrightarrow\ & \det(X) I_n = XA^\top \\ \Longrightarrow\ & \det(X)(A^\top)^{-1} = X \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de $\det(X)$, on passe au déterminant dans cette équation et on trouve :

$$\begin{aligned} \det(X) &= \det\left(\det(X)(A^\top)^{-1}\right) \\ &= \det(X)^n \times \det\left((A^\top)^{-1}\right) \\ &= \det(X)^n \times \frac{1}{\det(A^\top)} \\ &= \frac{\det(X)^n}{\det A} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\det(X)^{n-1} = \det A$. Ainsi, comme $n$ est pair, $n-1$ est impair et on peut écrire $\det(X) = \sqrt[n-1]{\det A}$. Finalement, on trouve :

$$X = \sqrt[n-1]{\det A}(A^\top)^{-1}$$

**Synthèse** : vérifions si ce $X$ convient. On a

$$\begin{aligned} & \mathrm{com}(X)^\top X = \det(X) I_n \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{com}(X)^\top \sqrt[n-1]{\det A}(A^\top)^{-1} = \det\left(\sqrt[n-1]{\det A}(A^\top)^{-1}\right) I_n \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{com}(X)^\top (\det A)^{\frac{1}{n-1}} (A^\top)^{-1} = (\det A)^{\frac{n}{n-1}} \det\left((A^\top)^{-1}\right) I_n \\ \Longrightarrow\ & (\det A)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{com}(X)^\top = (\det A)^{\frac{n}{n-1}} \times \frac{1}{\det(A^\top)} \times (A^\top) \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{com}(X)^\top = \frac{(\det A)^{\frac{n}{n-1}}}{(\det A)^{\frac{1}{n-1}}} \times \frac{1}{\det A} \times A^\top \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (\ldots) \Longrightarrow\ & \mathrm{com}(X)^\top = (\det A)^{\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1} - 1} \times A^\top \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{com}(X)^\top = A^\top \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{com}(X) = A \end{aligned}$$

d'où $X$ est bien solution. Finalement

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[n-1]{\det A}(A^\top)^{-1} \right\}}$$

# Exercice 4 : le gardien du phare

Le gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de $n \geq 2$ clés, dont une seule convient. Malheureusement, il a oublié quelle était la bonne clé, et essaye les clés les unes après les autres. Le gardien peut se trouver dans deux états :

- Ou bien il est sobre : lorsqu'une clé n'est pas la bonne, le gardien l'écarte pour toutes les tentatives suivantes.
- Ou bien il est ivre : il oublie alors, après chaque tentative, quelle clé il a essayé.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k$ l'évènement "la porte s'ouvre à la $k$-ième tentative".

**1)** Dans cette question, on suppose que le gardien est sobre et on notera $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ sous cette hypothèse. Calculer $p_1$, puis $p_2$, et enfin $p_k$.

/10

Pour le calcul de $p_1$, comme le gardien prend une clé au hasard parmi $n$, il est clair que $p_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{n}$.

Ensuite, $A_2$ est réalisé si et seulement si $A_1$ ne l'est pas et que le gardien a pris la bonne clé parmi les $n-1$ restantes. En particulier, $A_2 \subset \overline{A_1}$. Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}(A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) \\ &= \mathbb{P}(A_2 \mid \overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_1}) \\ &= \frac{1}{n-1} \times (1 - p_1) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(la formule des probabilités totales avec $A_1$ et $\overline{A_1}$ conclut également)

Calculons maintenant $p_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Puisqu'il y a $n$ clés et qu'une même clé n'est jamais essayée deux fois, il est clair que si $k \geq n+1$, alors $p_k = 0$. Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $p_k = \frac{1}{n}$.

- Par ce qui précède, cela est vrai pour le rang $k = 1$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $p_1 = \ldots = p_k = \frac{1}{n}$. Montrons que $p_{k+1} = \frac{1}{n}$. On pose $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, c'est-à-dire l'événement "la porte s'est ouverte parmi les tentatives 1 à $k$". Comme les événements $A_1, \cdots, A_k$ sont clairement deux à deux incompatibles, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i = \frac{k}{n}$$

De plus, on a $A_{k+1} \subset \overline{B}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \mathbb{P}(A_{k+1} \cap \overline{B}) \\ &= \mathbb{P}(A_{k+1} \mid \overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) \\ &= \frac{1}{n-k} \times \left(1 - \frac{k}{n}\right) \qquad \text{cf ci-dessous} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

En effet, à la $(k+1)$-ième tentative, il reste $n-k$ clés, d'où $\mathbb{P}(A_{k+1} \mid \overline{B}) = \frac{1}{n-k}$. On a donc montré la propriété au rang $k+1$.

- Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{p_k = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}}$

/10 **2)** Dans cette question, on suppose que le gardien est ivre et on notera $q_k = \mathbb{P}(A_k)$ sous cette hypothèse. Calculer $q_1$, puis $q_2$, et enfin $q_k$.

Pour le calcul de $q_1$, comme le gardien prend une clé au hasard parmi $n$, il est clair que $q_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{n}$.



Ensuite, $A_2$ est réalisé si et seulement si $A_1$ ne l'est pas et que le gardien a pris la bonne clé parmi les $n$ (étant ivre, il peut réessayer avec la même clé qu'à la première tentative). En particulier, $A_2 \subset \overline{A_1}$. Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} q_2 &= \mathbb{P}(A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) \\ &= \mathbb{P}(A_2 \mid \overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_1}) \\ &= \frac{1}{n} \times (1 - p_1) \\ &= \frac{n-1}{n^2} \end{aligned}$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence forte que $q_k = \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$.

- Par ce qui précède, cela est vrai pour le rang $k = 1$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que la pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $q_i = \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}$. Montrons que $q_{k+1} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}$. On pose $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, c'est-à-dire l'événement "la porte s'est ouverte parmi les tentatives 1 à $k$". Comme les événements $A_1, \cdots, A_k$ sont clairement deux à deux incompatibles, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{k} q_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1 - (\frac{n-1}{n})^k}{1 - \frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{1 - (\frac{n-1}{n})^k}{n - (n-1)} \\ &= 1 - (\frac{n-1}{n})^k \end{aligned}$$

De plus, on a $A_{k+1} \subset \overline{B}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= \mathbb{P}(A_{k+1} \cap \overline{B}) \\ &= \mathbb{P}(A_{k+1} \mid \overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) \\ &= \frac{1}{n} \times \left(1 - \left(1 - (\frac{n-1}{n})^k\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^k \end{aligned}$$

On a donc montré la propriété au rang $k+1$.

- Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{q_k = \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^k}$.

**3)** On note $I$ l'évènement "le gardien est ivre", de sorte que désormais

$$p_k = \mathbb{P}(A_k \mid \overline{I}) \qquad \text{et} \qquad q_k = \mathbb{P}(A_k \mid I)$$

Le gardien est ivre en moyenne trois jours par semaine. Un jour, le gardien utilise 9 clés. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

/8

Si $n < 9$, alors le gardien est nécessairement ivre : s'il était sobre, il réussit au bout de $n$ tentatives au maximum. Ainsi, cette probabilité vaut 1.

On suppose $n \geq 9$. Il est clair qu'alors $\mathbb{P}(A_9) > 0$. On cherche à déterminer $\mathbb{P}(I \mid A_9)$. Par la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I \mid A_9) &= \frac{\mathbb{P}(A_9 \mid I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(A_9)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_9 \mid I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(A_9 \mid I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A_9 \mid \overline{I})\mathbb{P}(\overline{I})} \\ &= \frac{q_9 \times \frac{3}{7}}{q_9 \times \frac{3}{7} + p_9 \times \frac{4}{7}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^9 \times \frac{3}{7}}{\frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^9 \times \frac{3}{7} + \frac{1}{n} \times \frac{4}{7}} \\ &= \boxed{\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^9 \times 3}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^9 \times 3 + 4}} \end{aligned}$$



**Exercice bonus (parce que je ne trouvais pas de blague)**

La date d'aujourd'hui, à l'envers, se lit 24/6/8. En utilisant le fait que 2468 divise 4936, 7404 et 9872, montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est un entier divisible par 2468 :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 0 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

/9

Montrons déjà que $D$ est un entier. Si on note $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ les coefficients de la matrice de ce déterminant, alors par la définition du déterminant, on a

$$D = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{4} a_{\sigma(i)i}$$

Or, pour tous $\sigma \in S_4$ et $i \in [\![1,4]\!]$, $a_{\sigma(i)i}$ est un entier, de même que $\varepsilon(\sigma)$. Donc par somme et produit d'entiers, le déterminant est encore un entier. Ainsi, $D$ est un entier.

Montrons à présente que 2468 divise $D$. En faisant les opérations $C_4 \leftarrow C_4 + 10C_3$ puis $C_4 \leftarrow C_4 + 100C_2$ et enfin $C_4 \leftarrow C_4 + 1000C_1$, on obtient :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 2468 \\ 4 & 9 & 3 & 4936 \\ 7 & 4 & 0 & 7404 \\ 9 & 8 & 7 & 9872 \end{vmatrix} \\ &= 2468 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, comme pour $D$, on montre que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ est un entier, si bien que 2468 divise $D$.